Operazioni su datum e coordinate

Parte I

Datum geodetico e datum cartografico

Assunto un sistema di riferimento cartesiano ortogonale di assi X, Y, Z *e origine O situata esattamente o approssimativamente nel centro della Terra, si definisce* **datum geodetico** *l'insieme delle informazioni che definiscono univocamente*

- *la* ***forma***,
- *la* ***posizione***,
- *l'****assetto***

della Terra.

Se poi, avendo l'esigenza di sviluppare la superficie terrestre mediante rappresentazioni cartografiche, si adotta l'ellissoide come approssimazione matematica semplificata del geoide, la forma, la posizione e l'assetto del datum geodetico sono quelli propri dell'ellissoide utilizzato.

Nel datum geodetico, infatti, l'ellissoide è fissato univocamente da ***8*** *parametri indipendenti*:

- **2 parametri di forma** dell'ellissoide (dati generalmente[1] dal **semiasse maggiore** $\mathbf{a}$ e dall'**eccentricità** $\mathbf{e}$ o, in alternativa, dal **semiasse minore** $\mathbf{b}$),
- **3 parametri di posizione** dell'ellissoide (coordinate del centro dell'ellissoide),
- **3 parametri di assetto** (angoli di direzione dell'ellissoide).

Assunto un sistema di riferimento cartesiano ortogonale locale di assi $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ *e origine O situata sulla superficie ellissoidica, si definisce* **datum cartografico** *l'insieme delle informazioni che fissano univocamente*

- *la* ***posizione****,*
- *l'****assetto***

del sistema di rappresentazione cartografico adottato.

Un datum cartografico è fissato univocamente da ***6*** *parametri indipendenti*:

- **3 parametri di posizione** (coordinate del centro del sistema cartografico),
- **3 parametri di assetto** (angoli di direzione del sistema cartografico).

Si possono considerare i seguenti esempi di datum:

- **WGS84** (**World Geodetic System 1984**): datum geodetico[2] geocentrico per le misure GPS su tutta la superficie terrestre.
- **Roma 40** (o **SI40**, **Sistema Italiano 1940**): datum geodetico[3]/cartografico per la cartografia ufficiale italiana dell'IGMI, realizzata mediante la rappresentazione di Gauss-Boaga.
- **ED50** (**European Datum 1950**): datum geodetico[4]/cartografico europeo per la cartografia internazionale con rappresentazione UTM.

---

[1] Gli altri parametri dell'ellissoide sono il **raggio di curvatura polare c**, l'**eccentricità seconda e'**, lo **schiacciamento** α e il suo inverso **f** (**inverse flattening**).

[2] L'ellissoide adottato in questo datum è il **GRS** (**Global Reference Frame**) **1980**.

[3] L'ellissoide adottato in questo datum è quello **di Hayford** o **Internazionale** del **1924**, orientato a Roma Monte Mario nel 1940.

[4] L'ellissoide adottato in questo datum è quello **di Hayford** o **Internazionale** del **1924** con orientamento medio europeo.

- **GE02** (**Genova 1902**): datum geodetico[5] per la cartografia catastale italiana con rappresentazione Cassini-Soldner.

Operazioni fra datum

Quando occorre effettuare operazioni sui datum, possono presentarsi i tre seguenti casi:

1) **passaggio di coordinate** nello stesso datum,
2) **conversione di datum** da un datum [A] a un datum [B] sulla base di formule e parametri di passaggio noti a priori,
3) **trasformazione di datum** da un datum [A] a un datum [B] con la stima dei parametri di trasformazione.

1. Passaggio di coordinate

Il passaggio di coordinate avviene all'interno di uno stesso datum; quello che cambia è il sistema di coordinate considerato.

Ad esempio, un passaggio analitico di coordinate può essere, nel medesimo datum Roma40, quello da coordinate cartesiane geocentriche $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ a coordinate geodetiche φ, λ, $\mathbf{h}$ o il viceversa.

2. Conversione di datum

La conversione di datum permette di passare da un datum [A] di partenza a un datum [B] di arrivo note le formule e i parametri di conversione.

Ad esempio, volendo passare da una terna di coordinate $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_{\mathbf{A}}$ in un datum [A] ad una terna $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_{\mathbf{B}}$ in un datum [B], occorre procedere per i seguenti passi:

[5] L'ellissoide adottato in questo datum è quello **di Bessel** del **1841**, orientato a Genova Istituto Idrografico della Marina nel 1902.

1- in [A], passaggio da coordinate cartografiche $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_{\mathbf{A}}$ a coordinate geodetiche $(\varphi, \lambda, \mathbf{h})_{\mathbf{A}}$ tramite le equazioni della carta inverse;

2- in [A], passaggio da coordinate geodetiche $(\varphi, \lambda, \mathbf{h})_{\mathbf{A}}$ a coordinate cartesiane geocentriche $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})_{\mathbf{A}}$;

3- rototraslazione dal datum [A] al datum [B] con la formula sottostante, nella quale sono *noti a priori i 6 parametri di conversione* $X^{\mathbf{B}}{}_{\mathbf{A}}$, $Y^{\mathbf{B}}{}_{\mathbf{A}}$, $Z^{\mathbf{B}}{}_{\mathbf{A}}$ (vettore traslazione), $\alpha_{\mathbf{X}}$, $\alpha_{\mathbf{Y}}$ e $\alpha_{\mathbf{Z}}$ (angoli di rotazione[6])

$$\begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_A^B \\ Y_A^B \\ Z_A^B \end{vmatrix} + R(\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_Z) \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix}$$

4- in [B], passaggio da coordinate cartesiane geocentriche $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})_{\mathbf{B}}$ a coordinate geodetiche $(\varphi, \lambda, \mathbf{h})_{\mathbf{B}}$;

5- in [B], passaggio da coordinate geodetiche $(\varphi, \lambda, \mathbf{h})_{\mathbf{B}}$ a coordinate cartografiche $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_{\mathbf{B}}$ tramite le equazioni della carta.

Un possibile esempio può essere la conversione da $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_{\mathbf{Roma40}}$ a $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_{\mathbf{ED50}}$.

3. Trasformazione di datum

Nel caso di una trasformazione di datum i parametri $X^{\mathbf{B}}{}_{\mathbf{A}}$, $Y^{\mathbf{B}}{}_{\mathbf{A}}$, $Z^{\mathbf{B}}{}_{\mathbf{A}}$, $\alpha_{\mathbf{X}}$, $\alpha_{\mathbf{Y}}$ e $\alpha_{\mathbf{Z}}$ non sono noti a priori ed inoltre si considera, oltre alla rototraslazione, anche una variazione infinitesima di scala, anch'essa incognita in partenza e rappresentata dal parametro λ[7]; è pertanto *necessario stimare i 7 parametri mediante punti doppi (o omologhi)* di cui si conoscono le coordinate sia nel datum di partenza che in quello di arrivo.

Si abbia ancora a che fare con una terna di coordinate $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_{\mathbf{A}}$ in un datum di partenza [A] da trasformare in una terna $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_{\mathbf{B}}$ in un datum di arrivo [B].

[6] Generalmente le rotazioni sono piccole, pertanto la matrice di rotazione $\mathbf{R}$ può essere scritta nella forma:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_Z & -\alpha_Y \\ -\alpha_Z & 1 & \alpha_X \\ \alpha_Y & -\alpha_X & 1 \end{vmatrix}$$

[7] o μ a seconda dei casi.

Due esempi al riguardo sono la trasformazione di Helmert e la trasformazione di Molodenskij.

Per la **trasformazione di Helmert** i passi da seguire sono:

1- in [A], passaggio da coordinate cartografiche $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_A$ a coordinate geodetiche $(\varphi, \lambda, \mathbf{h})_A$ tramite le equazioni della carta inverse (come per la conversione di datum);

2- in [A], passaggio da coordinate geodetiche $(\varphi, \lambda, \mathbf{h})_A$ a coordinate cartesiane geocentriche $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})_A$ (come per la conversione di datum);

3- rototraslazione con variazione infinitesima di scala dal datum [A] al datum [B] secondo la formula sottostante, nella quale sono *da stimare i 7 parametri di trasformazione* $X^B{}_A$, $Y^B{}_A$, $Z^B{}_A$ (vettore traslazione), α_X, α_Y, α_Z (angoli di rotazione) e μ (variazione di scala):

$$\begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X^B_A \\ Y^B_A \\ Z^B_A \end{vmatrix} + (1+\mu) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_Z & -\alpha_Y \\ -\alpha_Z & 1 & \alpha_X \\ \alpha_Y & -\alpha_X & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix}$$

la stima dei parametri è ottenuta considerando almeno 3 punti doppi ed applicando il metodo dei minimi quadrati;

4- in [B], passaggio da coordinate cartesiane geocentriche $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})_B$ a coordinate geodetiche $(\varphi, \lambda, \mathbf{h})_B$ (come per la conversione di datum);

5- in [B], passaggio da coordinate geodetiche $(\varphi, \lambda, \mathbf{h})_B$ a coordinate cartografiche $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_B$ tramite le equazioni della carta (come per la conversione di datum).

La **trasformazione di Molodenskij** si effettua direttamente sulle coordinate geodetiche, senza cioè passare per le coordinate cartesiane geocentriche; pertanto i passi da seguire sono:

1- in [A], passaggio da coordinate cartografiche $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_A$ a coordinate geodetiche $(\varphi, \lambda, \mathbf{h})_A$ tramite le equazioni della carta inverse;

2- rototraslazione con variazione infinitesima di scala dal datum [A] al datum [B] in coordinate geodetiche, tramite *linearizzazione delle equazioni di trasformazione e applicazione del metodo dei minimi quadrati su almeno 3 punti doppi*, necessari per la stima dei *7 parametri di trasformazione*[8] $\delta\varphi^B{}_A$, $\delta\lambda^B{}_A$, $\delta h^B{}_A$, $\delta\alpha_X$, $\delta\alpha_Y$, $\delta\alpha_Z$, $\delta\mu$;

[8] I parametri di trasformazione da considerare sono quelli delle equazioni linearizzate.

3- in [B], passaggio da coordinate geodetiche $(\varphi, \lambda, \mathbf{h})_B$ a coordinate cartografiche $(\mathbf{E}, \mathbf{N}, \mathbf{h})_B$ tramite le equazioni della carta.

Si può dire che la trasformazione di Molodenskij è più vantaggiosa rispetto a quella di Helmert perché non sono necessari i passaggi di coordinate *geodetiche* → *cartesiane geocentriche* e viceversa.
Un altro importante vantaggio è riconducibile alla possibilità di sfruttare al meglio i punti doppi: delle tre formule di trasformazione in coordinate geodetiche, infatti, è possibile utilizzare quelle in φ e λ per i **vertici trigonometrici** (molto precisi in latitudine φ e longitudine λ ma meno precisi in quota ortometrica[9] H e quindi anche in quota ellissoidica h) e quella in h per i **caposaldi di livellazione** (molto precisi in H, e quindi in h, ma meno precisi in φ e λ).

Operazioni fra datum cartografici

Quando occorre passare da un datum cartografico [A] ad un datum cartografico [B] si possono considerare passaggi di coordinate, conversioni e trasformazioni di datum che abbiano in partenza e in arrivo le sole coordinate planimetriche.
Questo approccio, che non considera la componente altimetrica, risulta applicabile solo se gli ambiti territoriali considerati:

- sono di **limitata estensione**;
- presentano **variazioni di quota contenute**;
- hanno **deformazioni cartografiche ridotte**.

Questa metodologia si applica in ambito catastale nei seguenti casi pratici:

- conversioni “rigorose” tra i tre sistemi diffusi in ambito catastale:

  Cassini-Soldner (C.S.) ⇆ Gauss-Boaga (G.B.);

  Sanson-Flamsteed (S.F.) ⇆ Gauss-Boaga (G.B.);

  Sanson-Flamsteed (S.F.) ⇆ Cassini-Soldner (C.S.);

- digitalizzazione e georeferenziazione di carte in forma cartacea;
- trasformazione tra i tre sistemi tramite digitalizzazione.

Conversione "rigorosa" da Cassini-Soldner a Gauss-Boaga

Per questa operazione si opera nel piano, cioè considerando solo l'altimetria, nei punti 1) e 5) della procedura vista in precedenza per una generica conversione o trasformazione tra datum.
Nei passi centrali della procedura, invece, si lavora considerando anche l'altimetria, secondo un approccio geodetico/cartografico rigoroso.

Per una conversione da Cassini-Soldner (datum [A]) a Gauss-Boaga (datum [B]) occorre procedere secondo i seguenti punti:

1) Passaggio da coordinate catastali C.S. ($\mathbf{y},\mathbf{x}$) a coordinate geografiche (ϕ',λ') riferite all'ellissoide di Bessel secondo l'orientamento di Genova Istituto Idrografico della Marina (datum GE02); per questa operazione è necessario conoscere le coordinate (ϕ_0',λ_0') del punto di emanazione.
2) Passaggio da coordinate geodetiche ($\phi',\lambda',\mathrm{h}$) a coordinate cartesiane geocentriche ($\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}$) nel datum GE02.
3) Conversione dal datum GE02 al datum Roma40 tramite la rototraslazione:

$$\left|\begin{matrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z}\end{matrix}\right|_{\mathbf{Roma40}} = \left|\begin{matrix}\mathbf{X_0}\\ \mathbf{Y_0}\\ \mathbf{Z_0}\end{matrix}\right|_{\mathbf{Roma40}} + \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{X}},\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{Y}},\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{X}})\left|\begin{matrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\\ \mathbf{Z}\end{matrix}\right|_{\mathbf{GE02}}$$

con ($\mathbf{X_0},\mathbf{Y_0},\mathbf{Z_0}$) coordinate del punto di emanazione del datum Roma40 e α_X, α_Y e α_Z, angoli della matrice di rotazione $\mathbf{R}$ da GE02 a Roma40.
Le formule di conversione sono fornite dall'IGM e dal Catasto.

[9] Si ricorda che $\mathbf{h} \cong \mathbf{H} + \mathbf{N}$, con N ondulazione del geoide.

4) Passaggio da coordinate cartesiane geocentriche $(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ a coordinate geodetiche (ϕ,λ,h) nel datum Roma40.

5) Passaggio da coordinate geografiche (ϕ,λ) a coordinate cartografiche G.B. $(\mathbf{E},\mathbf{N})$ tramite le equazioni della carta.

Dal momento che storicamente la cartografia catastale è passata da Cassini-Soldner a Gauss-Boaga e che quindi a livello pratico serve convertire antichi punti e carte da Cassini-Soldner a Gauss-Boaga, risulta evidente che meno importanza ha passare da Gauss-Boaga a Cassini-Soldner. Anche in quest'ultimo caso, tuttavia, la procedura da seguire è quella in cinque punti vista poco sopra, con G.B.=datum [A] e C.S.=datum [B].
Considerazioni analoghe valgono anche per gli altri sistemi Sanson-Flamsteed (S.F.⇆ G.B. e S.F.⇆ C.S.).

Digitalizzazione e georeferenziazione di carte in forma cartacea

Con l'avvento del Catasto numerico, l'utilizzo di cartografia digitale diventa sempre più frequente: alcune carte vengono create ex novo in formato vettoriale, altre invece vengono digitalizzate mediante scanner.
A quest'ultima operazione è possibile associare una georeferenziazione, che altro non è che una trasformazione tra datum differenti.
Al momento della digitalizzazione, infatti, la carta passa dal datum cartografico [A] (C.S. o G.B.), al **sistema di riferimento digitale locale** [D], che ha come coordinate $(X,Y)_D$, o le **coordinate del digitalizzatore** $((X,Y)_D=(\mathbf{X},\mathbf{Y})_{\mathbf{dig}})$ o le **coordinate pixel** $((X,Y)_D= (\mathbf{X},\mathbf{Y})_{\mathbf{pix}})$.
Per georeferenziare la carta in un datum cartografico [B] è poi necessario effettuare una trasformazione dal sistema [D] al datum [B] di coordinate $(x,y)_B$.
La trasformazione che maggiormente si utilizza per quest'operazione è l'**affine generale** a 6 parametri incogniti[10], secondo la relazione:

Sistema di riferimento di partenza **D** $\longrightarrow$ **B** *Datum di arrivo*

[10] Cfr. Parte II, caso d).

$$\begin{cases} x_B = aX_D + bY_D + c \\ y_B = dX_D + eY_D + f \end{cases}$$

Per determinare i 6 parametri incogniti **a**, **b**, **c**, **d**, **e** e **f** occorre risolvere il sistema con i **minimi quadrati** su **almeno 3 punti doppi** (6 equazioni x 6 incognite).

In particolare, poi, la trasformazione affine può essere applicata:

- *in modo **discreto** (per ogni punto collimato) e in tempo reale (**real time**)*, se si utilizza un digitalizzatore sulla carta originale: in questo caso la carta cartacea non viene digitalizzata ma si calcolano direttamente su di essa le coordinate $(X,Y)_{dig}$ del sistema [D];
- *in modo **continuo** (per tutta la carta) e a posteriori (**off line**)*, mediante ricampionamento digitale dell'immagine raster digitalizzata.

Trasformazione da Cassini-Soldner a Gauss-Boaga tramite digitalizzazione

Quanto appena visto può essere adottato come procedura di trasformazione di coordinate da Cassini-Soldner a Gauss-Boaga.

In questo caso si ha:

- datum cartografico cartaceo di partenza [A] = **C.S. (y, x)**;
- sistema di riferimento digitale [D] = **D. $(X,Y)_D$** ;
- datum cartografico numerico di arrivo [B] = **G.B. (E, N)**.

Si procede quindi come segue:

- si effettua una ricerca documentaria delle coordinate G.B. di un sufficiente numero di punti P_i della carta catastale di partenza: un modo classico di operare è quello di considerare punti topografici o cartografici ben riconoscibili sulla carta catastale (vertici di confini, termini, croci isolate, spigoli di edifici, ecc...) e di determinarne le coordinate (E, N) su cartografia tecnica che si ha a disposizione;

- si misurano sulla carta digitalizzata nel sistema di riferimento D le coordinate $(X,Y)_D$ degli stessi punti P_i;
- si stimano i parametri della trasformazione affine tra D. e G.B. utilizzando le coordinate dei punti doppi P_i precedentemente trovate:

$$\begin{cases} E = aX_D + bY_D + c \\ N = dX_D + eY_D + f \end{cases}$$

  e risolvendo il sistema con i minimi quadrati;
- noti i sei parametri $a,\dots,f$, si applica la trasformazione affine da D. a G.B., ricampionando la carta; il risultato che si ottiene è una carta numerica in coordinate E, N, con la possibilità di confrontare le coordinate G.B. di un punto di quest'ultima carta con quelle C.S. dello stesso punto sulla mappa cartacea di partenza.

Come visto, la procedura esaminata si basa sulla ricerca documentaria, da parte dell'operatore, di punti omologhi in coordinate C.S. e G.B.; sono in fase di studio software in grado di automatizzare e ottimizzare anche la procedura di ricerca di punti omologhi, partendo da due carte numeriche realizzate in differenti datum cartografici.

Parte II

Trasformazioni piane

Il problema da affrontare è come passare, **nel piano**, da un datum **A**, di coordinate $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, ad un datum **B**, di coordinate $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, quando si abbia a che fare con delle trasformazioni, ossia quando non siano noti i parametri di passaggio da un sistema all'altro.

Nel seguito saranno esaminate, nell'ordine:

a) rototraslazione (trasformazione conforme a 3 parametri);
b) rototraslazione con variazione di scala isotropa (trasformazione conforme a 4 parametri);
c) rototraslazione con variazione di scala anisotropa (trasformazione affine particolare a 5 parametri);
d) rototraslazione con variazione di scala anisotropa e scorrimento angolare (trasformazione affine generale a 6 parametri);
e) rototraslazione con variazione di scala anisotropa, scorrimento angolare e angoli di convergenza (trasformazione omografica a 7 o 8 parametri);
f) trasformazione bilineare;
g) trasformazioni polinomiali generiche.

a. Rototraslazione (trasformazione conforme a 3 parametri)

Una rototraslazione tra due diversi datum è definita da un vettore di **traslazione** $\underline{\mathbf{t}}$ e da una matrice di **rotazione** $\mathbf{R}_\vartheta$.

Nel caso del piano si ha:

Datum di partenza: **A** $\longrightarrow$ **B** *Datum di arrivo*

in forma matriciale:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{vmatrix} = \mathbf{t} + \mathbf{R}_{\vartheta} \begin{vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{cos}\,\vartheta & \mathbf{sen}\,\vartheta \\ -\mathbf{sen}\,\vartheta & \mathbf{cos}\,\vartheta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{vmatrix}$$

<u>come sistema:</u>

$$\begin{cases} x = T_x + X\cos\vartheta + Y\mathrm{sen}\vartheta \\ y = T_y - X\mathrm{sen}\vartheta + Y\cos\vartheta \end{cases} \qquad (2.a.1)$$

I parametri da stimare formano il vettore $\underline{\xi}^*$:

$$\xi^* = \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \\ \vartheta \end{vmatrix}$$

con T_x : parametro di traslazione rispetto a x,

T_y : parametro di traslazione rispetto a y,

ϑ : parametro di rotazione da [A] a [B].

Per determinare i parametri incogniti si pone:

$$\mathbf{r = cos\vartheta}$$

$$\mathbf{s = sen\vartheta}$$

con la condizione che

$$\mathbf{r^2 + s^2 = 1} \qquad (2.a.2)$$

In questo modo il vettore incognito diventa $\underline{\xi}$:

$$\xi = \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \\ r \\ s \end{vmatrix}$$

mentre il sistema (2.a.1) viene scritto in forma lineare così (2.a.3):

$$\begin{cases} x = T_x + rX + sY \\ y = T_y + rY - sX \end{cases}$$

che in forma matriciale diventa:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{Y} & -\mathbf{X} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix}$$

ossia:

$$\underline{x} = A\,\underline{\xi}$$

Per determinare il vettore incognito $\underline{\xi}$ occorre risolvere il sistema algebricamente su 2 punti doppi (4 equazioni x 4 incognite, ridondanza nulla) o, meglio, con i **minimi quadrati** su **p ≥ 3 punti doppi** (ridondanza 2p-4).

Risolto il sistema e ottenuti i valori di T_x, T_y, r e s, si trovano l'angolo di rotazione ϑ mediante la formula:

$$\vartheta = \mathbf{arctg}\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{r}}\right)$$

Considerando $\underline{\xi}^*$ anzichè $\underline{\xi}$ il vettore incognito passa da 3 a 4 parametri: i parametri indipendenti, però, restano comunque 3, in quanto $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ sono legati dalla condizione (2.a.2).

Questa trasformazione è **conforme** e **equivalente** perché conserva le forme e le superfici degli oggetti passando da un sistema all'altro, in quanto vengono applicate solo una traslazione e una rotazione, che non comportano appunto deformazioni.

b. Rototraslazione con variazione di scala isotropa (trasformazione conforme a 4 parametri)

Rispetto al caso precedente si ha un nuovo parametro da stimare, λ, al quale compete una **variazione di scala** nel passare dal datum [A] al datum [B]; questa trasformazione, di conseguenza, non è equivalente.
La variazione di scala è di tipo **isotropo**, cioè uguale in tutte le direzioni: perciò anche in questo caso viene conservata la conformità passando da [A] a [B].

La trasformazione può essere quindi descritta come segue:

Datum di partenza: A $\longrightarrow$ B *Datum di arrivo*

in forma matriciale:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{vmatrix} = \mathbf{t} + \lambda \mathbf{R}_{\vartheta} \begin{vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{vmatrix}$$

come sistema:

$$\begin{cases} x = T_x + \lambda X\cos\vartheta + \lambda Y\operatorname{sen}\vartheta \\ y = T_y - \lambda X\operatorname{sen}\vartheta + \lambda Y\cos\vartheta \end{cases} \qquad (2.b.1)$$

I parametri da stimare formano il vettore ξ^*:

$$\xi^* = \begin{vmatrix} T_x \\ T_y \\ \vartheta \\ \lambda \end{vmatrix}$$

con T_x : parametro di traslazione rispetto a x,

T_y : parametro di traslazione rispetto a y,

ϑ : parametro di rotazione da [A] a [B] ,

λ : parametro di variazione di scala da [A] a [B].

Per determinare i parametri incogniti si pone:

$$\mathbf{r = \lambda cos\vartheta}$$

$$\mathbf{s = \lambda sen\vartheta}$$

In questo modo il vettore incognito diventa ξ:

$$\xi = \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix}$$

mentre il sistema (2.b.1) viene scritto in forma lineare così (2.b.2):

$$\begin{cases} x = T_x + rX + sY \\ y = T_y + rY - sX \end{cases}$$

che in forma matriciale diventa:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{Y} & \mathbf{-X} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix}$$

ossia:

$$\underline{x} = A\,\underline{\xi}$$

Per determinare il vettore incognito $\underline{\xi}$ occorre risolvere il sistema algebricamente su 2 punti doppi (4 equazioni x 4 incognite, ridondanza nulla) o, meglio, con i **minimi quadrati** su **$p \geq 3$ punti doppi** (ridondanza 2p-4).

Risolto il sistema e ottenuti i valori di T_x, T_y, r e s, si trovano l'angolo di rotazione ϑ e il parametro λ mediante le formule:

$$\vartheta = \mathbf{arctg}\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{r}}\right)$$

$$\lambda = \sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{s}^2}$$

c. Rototraslazione con variazione di scala anisotropa (trasformazione affine particolare a 5 parametri)

Ora la **variazione di scala** nel passare dal datum [A] al datum [B] è di tipo **anisotropo**, cioè differente a seconda della direzione considerata, precisamente di un parametro λ lungo x e di un parametro μ lungo y. In totale, quindi, i parametri incogniti della trasformazione sono **5**.

Inoltre, dal momento che in generale $\lambda \neq \mu$, la trasformazione non gode più della caratteristica di conformità vista per i casi precedenti.

La trasformazione in esame può così essere espressa:

Datum di partenza: A $\longrightarrow$ B *Datum di arrivo*

in forma matriciale:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mu} \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} \mathbf{cos\vartheta} & \mathbf{sen\vartheta} \\ \mathbf{-sen\vartheta} & \mathbf{cos\vartheta} \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{vmatrix}$$

come sistema:

$$\begin{cases} x = T_x + \lambda X\cos\vartheta + \lambda Y\text{sen}\vartheta \\ y = T_y - \mu X\text{sen}\vartheta + \mu Y\cos\vartheta \end{cases} \qquad (2.c.1)$$

I cinque parametri da stimare formano il vettore ξ^*:

$$\xi^* = \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \\ \boldsymbol{\vartheta} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\mu} \end{vmatrix}$$

con T_x : parametro di traslazione rispetto a x,

T_y : parametro di traslazione rispetto a y,

ϑ : parametro di rotazione da [A] a [B] ,

λ : parametro di variazione di scala in direzione x,

μ : parametro di variazione di scala in direzione y.

Per determinare i parametri incogniti si pone:

$$\mathbf{r = \lambda cos\vartheta}$$

$$\mathbf{s = \lambda sen\vartheta}$$

$$\mathbf{u = -\mu sen\vartheta}$$

$$\mathbf{v = \mu cos\vartheta}$$

con la condizione che

$$\mathbf{ru + sv = 0} \qquad (2.c.2)$$

che, in forma estesa, è:

$$-\lambda\mu\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\vartheta + \lambda\mu\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\vartheta = 0$$

In questo modo il nuovo vettore incognito è $\underset{\sim}{\xi}$:

$$\xi = \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{vmatrix}$$

mentre il sistema (2.c.1) viene scritto in forma lineare così (2.c.3):

$$\begin{cases} x = T_x + rX + sY \\ y = T_y + uX + vY \end{cases}$$

che in forma matriciale diventa:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{X} & \mathbf{Y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{vmatrix}$$

ossia:

$$\underline{x} = A\,\underset{\sim}{\xi}$$

Per determinare il vettore incognito $\underset{\sim}{\xi}$ occorre risolvere il sistema algebricamente su 3 punti doppi (6 equazioni x 6 incognite, ridondanza nulla) o, meglio, con i **minimi quadrati** su **$p \geq 4$ punti doppi** (ridondanza 2p-6).

Risolto il sistema e ottenuti i valori di T_x, T_y, r, s, u e v, si trovano l'angolo di rotazione ϑ e i parametri di scala λ e μ mediante le formule:

$$\vartheta = \mathbf{arctg}\left(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{r}}\right)$$

$$\lambda = \sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{s}^2}$$

$$\mu = \sqrt{\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2}$$

Considerando $\underline{\xi}^*$ anzichè $\underline{\xi}$, il vettore incognito passa da 5 a 6 parametri: i parametri indipendenti, però, restano comunque 5, in quanto r, s, u e v sono legati dalla condizione (2.c.2), in analogia a quanto visto per la rototraslazione (caso a.).

Questa trasformazione presenta la forma propria di una **trasformazione affine**, che di solito si esprime con un sistema del tipo:

$$\begin{cases} x = aX + bY + c \\ y = dX + eY + f \end{cases} \qquad (2.c.4)$$

In realtà, per quanto detto prima, nel caso di una rototraslazione con variazione anisotropa di scala è presente una condizione di dipendenza tra i parametri da stimare; pertanto i gradi di libertà del sistema non sono 6 ma **5** e la trasformazione viene detta **affine particolare**.

d. Rototraslazione con variazione di scala anisotropa e scorrimento angolare (trasformazione affine generale a 6 parametri)

In questo caso siamo in presenza di **6** parametri incogniti indipendenti da stimare e la trasformazione è riconducibile ad una **trasformazione affine generale**; rispetto alla rototraslazione con variazione di scala anisotropa (caso c.), il grado di libertà in più che si ha in questo caso è dovuto alla presenza di uno **scorrimento angolare** o **sbandamento**, espresso da un parametro angolare γ.

E' chiaro poi che, essendo questo caso una generalizzazione del precedente, la conformità non viene conservata, così come per le trasformazioni che saranno esaminate nel seguito.

La trasformazione può così essere descritta:

Datum di partenza: $\textcircled{A} \longrightarrow \textcircled{B}$ *Datum di arrivo*

<u>in forma matriciale:</u>

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{tg\gamma} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{cos\vartheta} & \mathbf{sen\vartheta} \\ -\mathbf{sen\vartheta} & \mathbf{cos\vartheta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{vmatrix}$$

<u>come sistema</u> (2.d.1):

$$\begin{cases} x = T_x + \lambda(\cos\vartheta - \mathrm{sen}\vartheta \ \mathrm{tg}\ \gamma)X + \lambda(\mathrm{sen}\vartheta + \cos\vartheta \ \mathrm{tg}\ \gamma)Y \\ y = T_y - (\mu \mathrm{sen}\vartheta)X + (\mu\cos\vartheta)Y \end{cases}$$

I sei parametri da stimare formano il vettore $\underline{\xi^*}$:

$$\xi^* = \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \\ \boldsymbol{\vartheta} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{vmatrix}$$

con T_x : parametro di traslazione rispetto a x,

T_y : parametro di traslazione rispetto a y,

ϑ : parametro di rotazione da [A] a [B] ,

λ : parametro di variazione di scala in direzione x,

μ : parametro di variazione di scala in direzione y,

γ : parametro di scorrimento angolare (o sbandamento).

Per determinare i parametri incogniti si pone:

$$\mathbf{r} = \lambda(\cos\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{tg}\gamma)$$

$$\mathbf{s} = \lambda(\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta \operatorname{tg}\gamma)$$

$$\mathbf{u} = -\mu \operatorname{sen}\vartheta$$

$$\mathbf{v} = \mu \cos\vartheta$$

senza alcuna condizione tra i parametri.

In questo modo il nuovo vettore incognito è ξ:

$$\xi = \begin{vmatrix} T_x \\ T_y \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{vmatrix}$$

mentre il sistema (2.d.1) viene scritto in forma lineare così (2.d.2):

$$\begin{cases} x = T_x + rX + sY \\ y = T_y + uX + vY \end{cases}$$

che in forma matriciale diventa:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{X} & \mathbf{Y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{T_x} \\ \mathbf{T_y} \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{vmatrix}$$

ossia:

$$\underline{x} = A\ \underline{\xi}$$

Per determinare il vettore incognito $\underline{\xi}$ occorre risolvere il sistema algebricamente su 3 punti doppi (6 equazioni x 6 incognite, ridondanza nulla) o, meglio, con i **minimi quadrati** su **p ≥ 4 punti doppi** (ridondanza 2p-6).

Risolto il sistema e ottenuti i valori di T_x, T_y, r, s, u e v, si trovano l'angolo di rotazione ϑ, i parametri di scala λ e μ e lo sbandamento γ mediante le formule[11]:

$$\vartheta = \mathbf{arctg}\left(\frac{-\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right) \qquad (2.d.3)$$

$$\lambda = \left(\sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{s}^2}\right)\mathbf{cos}\gamma \qquad (2.d.4)$$

$$\mu = \sqrt{\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2} \qquad (2.d.5)$$

$$\gamma = \mathbf{arcsen}\left(\frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{s}^2}}\right) - \vartheta \qquad (2.d.6)$$

---

11 Si verifica, infatti, che:
per la **(2.d.3)**:

$$arctg\left[\frac{-u}{v}\right] = arctg\left[\frac{-(-\mu sen\vartheta)}{\mu\cos\vartheta}\right] = arctg\left[\frac{sen\vartheta}{\cos\vartheta}\right] = \vartheta\,;$$

per la **(2.d.4)**:

$$\sqrt{r^2+s^2}\cos\gamma = \sqrt{\lambda^2(\cos\vartheta - sen\vartheta tg\gamma)^2 + \lambda^2(sen\vartheta + \cos\vartheta tg\gamma)^2}\cos\gamma =$$
$$= \lambda\cos\gamma\sqrt{\cos^2\vartheta + sen^2\vartheta tg^2\gamma - 2\cos\vartheta sen\vartheta tg\gamma + sen^2\vartheta + \cos^2\vartheta tg^2\gamma + 2sen\vartheta\cos\vartheta tg\gamma} =$$
$$= \lambda\cos\gamma\sqrt{1+tg^2\gamma} = \lambda\cos\gamma\sqrt{\frac{1}{\cos^2\gamma}} = \lambda$$

per la **(2.d.5)**:

$$\sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{\mu^2(-sen\vartheta)^2 + \mu^2(\cos\vartheta)^2} = \mu\,;$$

per la **(2.d.6)**:

$$arcsen\left[\frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}}\right] - \vartheta = arcsen\left[\frac{s\cos\gamma}{\lambda}\right] - \vartheta = arcsen\left[\frac{\lambda(sen\vartheta + \cos\vartheta tg\gamma)\cos\gamma}{\lambda}\right] - \vartheta =$$
$$= arcsen[sen\vartheta\cos\gamma + \cos\vartheta tg\gamma\cos\gamma] - \vartheta = arcsen[sen\vartheta\cos\gamma + \cos\vartheta sen\gamma] - \vartheta = \quad .$$
$$= arcsen[sen(\vartheta+\gamma)] - \vartheta = \gamma$$

Questa trasformazione, come detto, corrisponde ad una **trasformazione affine generale**, che di solito si esprime con un sistema del tipo:

$$\begin{cases} x = aX + bY + c \\ y = dX + eY + f \end{cases} \qquad (2.d.7)$$

del tutto analogo al sistema (2.c.4) visto per la rototraslazione con variazione anisotropa di scala. In questo, però, i parametri sono 6 e non 5 come per (2.c.4), che appunto è detta trasformazione affine *particolare*.

Esaminando la (2.d.7), si può notare che

$$\mathbf{a = r}, \qquad \mathbf{b = s}, \qquad \mathbf{c = T_x},$$

$$\mathbf{d = u}, \qquad \mathbf{e = v}, \qquad \mathbf{f = T_y}.$$

I sistemi (2.d.1) e (2.d.2) e i vettori $\underline{\xi}$ e $\underline{\xi}^*$ descrivono il problema dal punto di vista **geometrico**; il sistema (2.d.7) e il vettore $[\ a\ b\ c\ d\ e\ f\ ]^T$, invece, dal punto di vista **analitico**.

e. Rototraslazione con variazione di scala anisotropa, scorrimento angolare e angoli di convergenza (trasformazione omografica a 7 o 8 parametri)

La **trasformazione omografica** aggiunge, rispetto al caso precedente, degli **angoli di convergenza longitudinale** e/o **trasversale**.

La trasformazione viene espressa tramite il sistema seguente (5.e.1):

Datum di partenza: A $\longrightarrow$ B *Datum di arrivo*

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{aX + bY + c}}{\mathbf{gX + hY + 1}} \\ \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{dX + eY + f}}{\mathbf{gX + hY + 1}} \end{cases}$$

nel quale:

$\mathbf{g \neq 0}$ e $\mathbf{h = 0}$ in caso di angolo di convergenza e trasformazione omografica **longitudinale** (**7** parametri da determinare: $\mathbf{a}$,..., $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$);

$\mathbf{g = 0}$ e $\mathbf{h \neq 0}$ in caso di angolo di convergenza e trasformazione omografica **trasversale** (**7** parametri da determinare: $\mathbf{a,\ldots, f, h}$);

$\mathbf{g \neq 0}$ e $\mathbf{h \neq 0}$ in caso di angoli di convergenza e trasformazione omografica **longitudinale e trasversale** (**8** parametri da determinare: $\mathbf{a,\ldots, f, g, h}$; **trasformazione proiettiva**).

In ogni caso i parametri da determinare non hanno un preciso significato geometrico come lo avevano in precedenza gli elementi dei vettori ξ^*.

Inoltre le equazioni del sistema (2.e.1) non sono lineari come nei casi dei sistemi visti prima: è pertanto necessario linearizzarle utilizzando uno sviluppo in serie di Taylor attorno ad un valore approssimato e troncato ai termini di primo grado negli incrementi incogniti, da stimarsi mediante il principio dei <u>**minimi quadrati**</u> su **almeno** $\mathbf{p \geq 4}$ **punti doppi** (8 equazioni x 7/8 incognite).

f. Trasformazione bilineare (8 parametri)

L'espressione della **trasformazione bilineare** è la seguente (2.f.1):

$$\begin{cases} \mathbf{x = a + bX + cY + dXY} \\ \mathbf{y = e + fX + gY + hXY} \end{cases}$$

Essa, come l'omografica, presenta 8 parametri privi di preciso significato geometrico e da stimare mediante <u>**minimi quadrati**</u> su **almeno** $\mathbf{p \geq 4}$ **punti doppi**.

g. Trasformazioni polinomiali generiche

La (2.f.1) è un esempio di trasformazione polinomiale, come lo sono del resto i sistemi (2.a.3), (2.b.2), (2.c.3), (2.c.4) e (2.d.2) visti in precedenza.

L'espressione di una **trasformazione polinomiale** di grado m in x e grado n in y è:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} X^i Y^j \\ y = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} b_{ij} X^i Y^j \end{cases}$$

Ad esempio, una polinomiale di grado 3 in $\mathbf{x}$ e grado 2 in $\mathbf{y}$ è data da:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{2} a_{ij} X^i Y^j = \sum_{i=0}^{3} \left(a_{i0} X^i Y^0 + a_{i1} X^i Y^1 + a_{i2} X^i Y^2 \right) \\ y = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{2} b_{ij} X^i Y^j = \sum_{i=0}^{3} \left(b_{i0} X^i Y^0 + b_{i1} X^i Y^1 + b_{i2} X^i Y^2 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a_{00} X^0 Y^0 + a_{01} X^0 Y^1 + a_{02} X^0 Y^2 + a_{10} X^1 Y^0 + a_{11} X^1 Y^1 + a_{12} X^1 Y^2 + a_{20} X^2 Y^0 + a_{21} X^2 Y^1 + a_{22} X^2 Y^2 + \\ + a_{30} X^3 Y^0 + a_{31} X^3 Y^1 + a_{32} X^3 Y^2 \\ y = b_{00} X^0 Y^0 + b_{01} X^0 Y^1 + b_{02} X^0 Y^2 + b_{10} X^1 Y^0 + b_{11} X^1 Y^1 + b_{12} X^1 Y^2 + b_{20} X^2 Y^0 + b_{21} X^2 Y^1 + b_{22} X^2 Y^2 + \\ + b_{30} X^3 Y^0 + b_{31} X^3 Y^1 + b_{32} X^3 Y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a_{00} + a_{10} X + a_{01} Y + a_{11} XY + a_{20} X^2 + a_{02} Y^2 + a_{30} X^3 + a_{21} X^2 Y + a_{12} XY^2 + a_{22} X^2 Y^2 + a_{31} X^3 Y + a_{32} X^3 Y^2 \\ y = b_{00} + b_{10} X + b_{01} Y + b_{11} XY + b_{20} X^2 + b_{02} Y^2 + b_{30} X^3 + b_{21} X^2 Y + b_{12} XY^2 + b_{22} X^2 Y^2 + b_{31} X^3 Y + b_{32} X^3 Y^2 \end{cases}$$

con 24 parametri da stimare.

FONTI BIBLIOGRAFICHE PER APPROFONDIMENTI

- Biagi L. – **Dispense del corso di misure geodetiche –** http://geomatica.como.polimi.it/corsi/
- Brovelli M.A. – **Dispense del corso di cartografia numerica (N.O. e V.O.) –** http://geomatica.como.polimi.it/corsi/
- Kraus K. (1998) – **Fotogrammetria –** Levrotto & Bella

Ultimo aggiornamento: 11/01/2005

LICENZA